

# اقتصاد مالی ریاضیاتی

سرشناسه	: یفستیگنی یف، ای. و. Evstigneev, I. V.
عنوان و نام پدیدآور	: اقتصاد مالی ریاضیاتی/ نویسندگان ایگور اوستیگنیو، تاستن هنس، کلاس راینرشنک هوپ؛ مترجمان کاظم بیابانی خامنه، سعید خزانی.
مشخصات نشر	: تهران: آماره، ۱۴۰۲
مشخصات ظاهری	: ۲۴۲ص: جدول، نمودار.
شابک	: 978-622-732617-8
وضعیت فهرست‌نویسی	: فیبا
یادداشت	: عنوان اصلی: Mathematical financial economics, c2020.
موضوع	: ریاضیات بازرگانی Business mathematics -- اقتصاد ریاضی Economics, -- Mathematical
شناسه افزوده	: هنس، تورستن Hens, Thorsten --
شناسه افزوده	: شنک- هوپه، کلاوس راینر Schenk-Hoppé, Klaus Reiner --
شناسه افزوده	: بیابانی خامنه، کاظم، ۱۳۶۹-، مترجم
شناسه افزوده	: خزانی، سعید، ۱۳۶۵-، مترجم
رده‌بندی کنگره	: HF۵۶۹۱
رده‌بندی دیویی	: ۳۳۰/۰۱۵۱
شماره کتاب‌شناسی ملی	: ۷۴۴۰۳۴۰

# اقتصاد مالی ریاضیاتی

نویسندگان:

ایگور اوستیگنیو، تاستن ہنس

کلاوس رایئر شک-ہوپ

مترجمان:

کاظم بیابانی خامنہ، سعید خزائی



نشرآمارہ

© Nashr-e-Amareh, MMXXIII



عنوان کتاب: اقتصاد مالی ریاضیاتی	Title: Mathematical financial economics
تالیف: ایگور اوستیگنیو، تاستن هنس، کلاس راینرشنک هوب	Authors: Igor V. Evstigneev • Thorsten Hens • Klaus Reiner Schenk-Hoppé
مترجمین: کاظم بیابانی خامنه، سعید خزائی	Translators: K. Biabany & S. khazaei
شابک: ۹۷۸-۶۲۲-۷۳۲۶-۱۷-۸	ISBN: 978-622-7326-17-8
نوبت چاپ: دوم تاریخ چاپ: ۱۴۰۲	The 2 <sup>nd</sup> Edition Published: 2023
تیراژ: ۳۰۰ نسخه	Circulation: 300 impression
هرگونه کپی برداری، اسکن و میکروفیلم، جزئی یا کلی بدون اجازه مکتوب نشر آماره ممنوع بوده و پیگرد قانونی دارد	No portion of this book may be reproduced, by any process or technique, without the express written consent of the publisher (Amareh Press)
محتوای اصلی کتاب بازتاب اندیشه‌های پدیدآورنده‌ها توسط ناشر می‌باشد و مسئولیت درستی آن به عهده‌ی ایشان می‌باشد	The views expressed in this book represent those of the individual Authors and Editors. These views do not necessarily reflect endorsement by the Publisher (Amareh Press)
© تمامی حقوق چاپ و نشر برای نشر آماره محفوظ است	© ALL RIGHTS RESERVED: for the Amareh Press

دفتر مرکزی نشر آماره: تهران، میدان انقلاب، خیابان انقلاب، ابتدای خیابان دوازده فروردین،

پلاک ۳۱۶، واحد ۴ تلفن ۰۹۳۶۸۷۶۴۳۹۱

برای آگاهی از اطلاعات بیشتر به وبسایت نشر آماره مراجعه کنید:

*w w w . n a s h r e a m a r e h . i r*

قیمت: ۱۴۰ هزار تومان

## پیشگفتار مترجمان

مجلدی که در دست دارید ترجمه فارسی کتابی تحت عنوان *Mathematical Financial Economics* است که در سال ۲۰۱۵ توسط انتشارات Springer به زبان انگلیسی منتشر شد. نویسندگان کتاب از جمله اساتید و پژوهشگران پیشتاز در حوزه مالیه به‌ویژه ریاضی مالی و مالیه رفتاری هستند که در سال‌های اخیر مشارکت عمده‌ای در پیشبرد نظریات مالی داشته‌اند.

بنیان اصلی کتاب بر بیان ریاضیاتی مدل‌ها و نظریات اقتصاد مالی قرار دارد. از این‌رو علاوه بر اینکه منبع درسی روزآمدی با رویکرد ریاضیاتی برای درس اقتصاد مالی است و می‌تواند مرجعی برای اثبات ریاضیاتی قضایای اقتصاد مالی باشد، به‌عنوان منبعی آموزشی برای درس ریاضیات مالی نیز مطرح است.

سه مزیت اصلی برای کتاب حاضر از نظر مترجمان قابل اشاره است. نخستین مزیت کتاب تلاش نویسندگان به استفاده حداقلی از ریاضیات پیشرفته برای نمایش قضایای اقتصاد مالی است که استفاده از کتاب را برای دانشجویان با پیشینه ریاضیاتی کمتر تسهیل می‌بخشد. مزیت دوم خلاصه و موجز بودن فصول به اندازه تدریس هر فصل در یک جلسه کلاس است. سومین مزیت کتاب توجه به موضوع تعادل عمومی در بازارهای مالی و پرداختن به مدل‌های ریاضیاتی مالیه تکاملی و مالیه رفتاری است که بنا بر دانسته مترجمان تاکنون در دیگر کتب درسی به این شکل ارائه نشده است.

اگرچه کوشش حداکثری شده تا متن فارسی و معادلات ریاضی کمترین حد اشکال را دارا باشند، با این حال قطعاً کاستی‌هایی باقی مانده که مترجمان از نظرات و انتقادات دانشجویان و اساتید گرامی در جهت رفع این نقایص استقبال می‌کنند.

در پایان بر خود لازم می‌دانیم از جناب آقای نوع‌پرست و همکاران ایشان در نشر آماره تشکر و قدردانی کنیم که بدون حمایت‌ها و زحماتشان انتشار این کتاب تحقق نمی‌یافت.

کاظم بیابانی خامنه

**Biabany@outlook.com**

سعید خزائی

**s.khazaei65@yahoo.com**

## پیشگفتار نویسندگان

کتاب درسی حاضر مقدمه‌ای پایه‌ای بر مباحث کلیدی ریاضیات مالی و اقتصاد مالی - دو عرصه از ایده‌هایی که به‌طور قابل ملاحظه‌ای همپوشانی دارند اما اغلب جدای از یکدیگر طرح می‌شوند - ارائه می‌کند. هدف ما ارائه بخش‌های برگزیده این حوزه با تأکید بر درون‌مایه اقتصادی و مالی مدل‌ها، مفاهیم و نتایج است. کتاب با استنتاج هر مبحث از اصول پایه متداول و نمایش تعامل میان موضوعات، طرحی یکپارچه و نوآورانه ارائه می‌کند.

با وجود اینکه مباحث کتاب کاملاً دقیق است، به‌جز چند استثناء، خودمان را تنها به استفاده از مفاهیم و تکنیک‌های ریاضیاتی پایه مقید نگه‌داشته‌ایم. هیچ ریاضیات پیشرفته‌ای (نظیر حسابان تصادفی<sup>۱</sup> استفاده نشده است. منبع اصلی کتاب و بستر ارزیابی مواد درسی کتاب، کلاس‌های ریاضی مالی، اقتصاد مالی و مدیریت ریسک بوده که در دهه گذشته برای دانشجویان لیسانس و تحصیلات تکمیلی اقتصاد و مالی در دانشگاه‌های منچستر، زوریخ و لیدز تدریس کرده‌ایم.

این کتاب مشتمل بر ۱۸ فصل متناظر با ۱۸ درس برای کلاسی مبتنی بر آن است. سه فصل کتاب به مسائل و تمرین‌ها اختصاص یافته که بیشتر آن‌ها در آموزش‌ها، تکالیف خانگی و امتحانات استفاده شده و با پاسخ‌های کامل و تفصیلی ارائه شده‌اند. مسائل و تمرینات نه تنها شامل مثال‌های عددی هستند، بلکه پرسش‌های نظری نیز دارند که مطالب ارائه شده در بدنه کتاب را تکمیل می‌کنند. دو پیوست ریاضی تعاریف دقیقی از چند مفهوم ریاضیاتی و گزاره‌هایی از قضایای اصلی مورد استفاده در متن را ارائه می‌کنند.

کتاب مباحثی کلاسیک نظیر تحلیل پرتفوی میانگین-واریانس (مارکویتز<sup>۲</sup>، CAPM،

---

1. stochastic calculus

2. Markowitz

مدل‌های عاملی<sup>۱</sup>، APT راس-هابرمن<sup>۲</sup>، قیمت‌گذاری اوراق بهادار مشتقه و مدل‌های تعادل عمومی بازار دارایی‌ها<sup>۳</sup> (ارو، دبرو و رادنر<sup>۴</sup>) را پوشش می‌دهد. یک مبحث بسیار مهم اما کمتر متعارف که بر اساس اطلاعات ما در کتب درسی پایه پیش از این پوشش داده نشده بود نظریه رشد سرمایه<sup>۵</sup> (کلی، بریمن، کاور<sup>۶</sup>) است. یافته‌های پژوهشی سال‌های اخیر یعنی مدل‌های جدید تعادل عمومی پویای بازارهای مالی که اصول رویکردهای رفتاری و تکاملی<sup>۷</sup> به مالیه را ترکیب کرده‌اند نیز به‌عنوان مواد درسی جدید در کتاب پوشش داده شده است.

ویژگی مشخصه اقتصاد مالی این است که باید بر تحلیل وضعیت‌های بازاری تصادفی و غیرقابل پیش‌بینی متمرکز باشد. برای مدل‌سازی چنین وضعیت‌هایی رویکرد ما ابزارهای نظری قدرتمندی بر اساس احتمال و فرآیندهای تصادفی خلق کرده است. با این حال، قدرت ذهن انسان نامحدود نیست و هیچ‌وقت نمی‌تواند که تأثیر بخت و اقبال را بر نتایج تصمیمات از بین ببرد.

ایگور اوستیگنیو<sup>۸</sup>، منچستر، بریتانیا

تاستن هنس<sup>۹</sup>، زوریخ، سوئیس

کلاوس رایتر شنک-هوپ<sup>۱۰</sup>، منچستر، بریتانیا

- 
1. factor models
  2. the Ross-Huberman APT
  3. general equilibrium models of asset markets
  4. Arrow, Debreu and Radner
  5. capital growth theory
  6. Kelly, Breiman, Cover
  7. behavioral and evolutionary principles
  8. Igor V. Evstigneev
  9. Thorsten Hens
  10. Klaus Reiner Schenk-Hoppé



## فهرست مطالب

- فصل اول: انتخاب پرتفوی: توضیحات مقدماتی ..... ۱۳
- ۱-۱ قیمت و بازده دارایی‌ها ..... ۱۳
- ۲-۱ پرتفوی سرمایه‌گذار: موقعیت‌های عاریه‌ای و تملک ..... ۱۴
- ۳-۱ بازده یک پرتفوی ..... ۱۶
- ۴-۱ نمادگذاری ریاضیاتی ..... ۱۹
- فصل دوم: تحلیل پرتفوی میانگین-واریانس: مدل مارکویتز ..... ۲۱
- ۱-۲ مفاهیم پایه‌ای ..... ۲۱
- ۲-۲ مسئله بهینه‌سازی: تشریح و فرمول‌بندی ..... ۲۳
- ۳-۲ فرضیات ..... ۲۵
- ۴-۲ پرتفوی‌های کارا و مرز کارا ..... ۲۷
- فصل سوم: راه‌حل مسئله بهینه‌سازی مارکویتز ..... ۳۱
- ۱-۳ بیان نتیجه اصلی ..... ۳۱
- ۲-۳ تشریح ..... ۳۳
- ۳-۳ اثبات نتیجه اصلی ..... ۳۵
- فصل چهارم: ویژگی‌های پرتفوی کارا ..... ۳۹
- ۱-۴ میانگین و واریانس بازده پرتفوی کارا ..... ۳۹
- ۲-۴ توصیف مرز کارا ..... ۴۱
- ۳-۴ قضیه تفکیک صندوق ..... ۴۳

فصل پنجم: مدل مارکویتز با یک دارایی بدون ریسک .....	۴۵
۱-۵ داده‌های مدل .....	۴۵
۲-۵ بهینه‌سازی پرتفوی با یک دارایی ریسکی .....	۴۸
۳-۵ راه‌حل مسئله انتخاب پرتفوی .....	۵۰
<b>فصل ششم: پرتفوی‌های کارا در بازار با یک دارایی بدون ریسک .....</b>	<b>۵۵</b>
۱-۶ امید و واریانس بازده پرتفوی‌ها .....	۵۵
۲-۶ مرز کارا و خط بازار سرمایه .....	۵۷
۳-۶ پرتفوی مماس .....	۵۹
۴-۶ قضیه صندوق مشترک .....	۶۴
<b>فصل هفتم: مدل قیمت‌گذاری دارایی سرمایه‌ای (CAPM) .....</b>	<b>۶۶</b>
۱-۷ نتیجه کلی .....	۶۶
۲-۷ یک رویکرد تعادلی به CAPM .....	۶۸
۳-۷ فرمول شارپ-لیتتنر-موسین .....	۷۲
<b>فصل هشتم: ادامه CAPM .....</b>	<b>۷۴</b>
۱-۸ خط بازار اوراق بهادار و معادله قیمت‌گذاری .....	۷۴
۲-۸ CAPM به عنوان یک مدل عاملی .....	۷۶
۳-۸ کاربرد تئوری در عمل: آزمون‌های شارپ و جنسن .....	۷۸
<b>فصل نهم: مدل‌های عاملی و APT راس-هابرمن .....</b>	<b>۸۲</b>
۱-۹ مدل‌های تک عاملی و چندعاملی .....	۸۲
۲-۹ قیمت‌گذاری عاملی کامل .....	۸۴
۳-۹ APT راس-هابرمن: توصیف مدل .....	۸۹
۴-۹ فرمول‌بندی و اثبات نتیجه اصلی .....	۹۱
<b>فصل دهم: مسائل و تمرینات .....</b>	<b>۹۶</b>
سؤال ۱-۱۰ (پرتفوی مماس و نسبت شارپ) .....	۹۶
سؤال ۲-۱۰ (مسئله $M^H$ ) برای مدل فاقد دارایی بدون ریسک) .....	۱۰۰
سؤال ۳-۱۰ (مسئله $M^H$ ) برای مدلی با یک دارایی بدون ریسک) .....	۱۰۴

- سؤال ۱۰-۴ (یک مثال عددی از انتخاب پرتفوی) ..... ۱۰۷
- سؤال ۱۰-۵ (شاخص جنسن و نسبت شارپ) ..... ۱۱۳
- فصل یازدهم: مدل پویای بازار اوراق بهادار** ..... ۱۱۸
- ۱-۱۱ مدل چند دوره‌ای از یک بازار دارایی ..... ۱۱۸
- ۲-۱۱ اوراق بهادار ساده و مشتقه ..... ۱۲۲
- ۳-۱۱ قیمت‌گذاری نبود آربیتراژ: نتیجه اصلی ..... ۱۲۴
- ۴-۱۱ فرضیه نبود آربیتراژ و خالص ارزش فعلی ..... ۱۲۷
- فصل دوازدهم: قیمت‌گذاری ریسک خنثی** ..... ۱۳۰
- ۱-۱۲ اندازه‌های ریسک خنثی ..... ۱۳۰
- ۲-۱۲ قضیه بنیادی قیمت‌گذاری دارایی ..... ۱۳۳
- ۳-۱۲ قیمت‌گذاری دارایی در بازارهای کامل ..... ۱۳۵
- فصل سیزدهم: مدل دو جمله‌ای کاکس-راس-رایبشتاین** ..... ۱۴۰
- ۱-۱۳ ساختار مدل ..... ۱۴۰
- ۲-۱۳ کاملیت مدل ..... ۱۴۲
- ۳-۱۳ ساخت یک اندازه ریسک خنثی ..... ۱۴۴
- ۴-۱۳ مثال‌ها ..... ۱۴۸
- فصل چهاردهم: اوراق بهادار مشتقه امریکایی** ..... ۱۵۲
- ۱-۱۴ مفهوم ورق بهادار مشتقه امریکایی ..... ۱۵۲
- ۲-۱۴ قیمت‌گذاری ریسک خنثای اوراق بهادار مشتقه امریکایی ..... ۱۵۴
- ۳-۱۴ الگوریتم قیمت‌گذاری ..... ۱۵۷
- فصل پانزدهم: از مدل دو جمله‌ای تا قاعده بلک-شولز** ..... ۱۶۲
- ۱-۱۵ رانش و تلاطم ..... ۱۶۲
- ۲-۱۵ مدل‌سازی فرایند قیمت ..... ۱۶۳
- ۳-۱۵ تقریب دو جمله‌ای از فرایند قیمت ..... ۱۶۵
- ۴-۱۵ استخراج قاعده بلک شولز ..... ۱۶۸

فصل شانزدهم: مسائل و تمرینات .....	۱۷۵
فصل هفدهم: نظریه رشد سرمایه .....	۱۸۶
۱-۱۷ سرمایه‌گذاری‌های رشد-بهینه .....	۱۸۶
۲-۱۷ استراتژی‌ها برحسب سهم سرمایه‌گذاری‌ها .....	۱۸۸
۳-۱۷ نتایجی برای استراتژی‌های ساده .....	۱۹۱
فصل هجدهم: نظریه رشد سرمایه: ادامه .....	۱۹۶
۱-۱۸ استراتژی‌های لگاریتم-بهینه .....	۱۹۶
۲-۱۸ استراتژی‌های رشد بهینه و استراتژی‌های شمارنده .....	۱۹۸
۳-۱۸ رشد-بهینگی برای استراتژی‌های عمومی .....	۲۰۰
۴-۱۸ رشد ناشی از تلاطم .....	۲۰۳
فصل نوزدهم: تحلیل تعادل عمومی بازارهای مالی .....	۲۰۹
۱-۱۹ تعادل والراسی .....	۲۰۹
۲-۱۹ موجودیت تعادل .....	۲۱۲
۳-۱۹ انتظارات عقلایی و قیمت‌گذاری تعادلی .....	۲۱۴
۴-۱۹ آربیتراژ و تعادل .....	۲۱۷
فصل بیستم: تعادل رفتاری و پویایی‌های تکاملی .....	۲۲۱
۱-۲۰ دیدگاه تکاملی رفتاری .....	۲۲۱
۲-۲۰ استراتژی‌های بقا .....	۲۲۶
۳-۲۰ ارتباط با نظریه کلاسیک .....	۲۲۷
فصل بیست‌ویکم: مسائل و تمرینات .....	۲۳۱
منابع .....	۲۴۱

# انتخاب پرتفوی: توضیحات مقدماتی

## ۱-۱ قیمت و بازده دارایی‌ها

دارایی‌ها: یک بازار مالی را در نظر می‌گیریم که  $N$  دارایی (اوراق بهادار)  $i=1,2,\dots,N$  در آن معامله می‌شود. دارایی‌های معمول شامل سهام عادی، اوراق قرضه، پول داخلی یا خارجی و غیره هستند. عموماً واژه «دارایی» با هر ابزار مالی<sup>۱</sup> که می‌تواند خریده یا فروخته شود مرتبط است.

بازده<sup>۲</sup>: هر دارایی با بازده آن  $R_i$  مشخص می‌شود. بازده دارایی  $i$  یعنی  $R_i$  یک متغیر تصادفی است. به منظور مدل‌سازی ریاضی، فرض خواهیم کرد برخی مشخصات متغیرهای تصادفی  $R_i$ ،  $i=1,2,\dots,N$  (مثل امید و کوواریانس‌ها<sup>۳</sup>) معلوم باشند.

قیمت و بازده دارایی‌ها: بازده دارایی‌ها چگونه محاسبه می‌شود؟ مدلی را در نظر می‌گیریم که در آن دو لحظه زمانی 0 و 1 موجود باشد. بگذاریم  $S_0^i > 0$  قیمت دارایی  $i$  در زمان 0؛ و  $S_0^i \geq 0$  قیمت دارایی در زمان 1 باشد. بنابراین بازده دارایی به صورت

$$R_i = \frac{S_1^i - S_0^i}{S_0^i}$$

1. financial instrument
2. return
3. Expectations and covariances